Introduzione ai frattali IFS

di Andrea Centomo

Email: andrea.centomo@istruzione.it

19 Gennaio 2004

Lo studio della matematica frattale richiede un bagaglio di conoscenze consistente per cui, in questa lezione introduttiva, ci limitiamo all'esame di qualche esempio senza entrare in trattazioni troppo generali per le quali il lettore è rinviato alla bibliografia.

Il tipo di frattali che ora andiamo ad esplorare, che non è l'unico, è noto in letteratura con l'acronimo IFS che significa letteralmente *Iterated Function System*. Le ragioni di questa scelta terminologica saranno chiare da quanto seguirà.

1 Triangolo di Sierpinski

Il primo esempio di insieme frattale che consideriamo è il triangolo di Sierpinski. Si tratta di un esempio molto semplice e, forse, non molto gratificante esteticamente. Tuttavia ci permette di comprendere molte proprietà importanti degli IFS.

Iniziamo allora considerando il triangolo equilatero S_0 di figura, inclusi i suoi punti interni, e supponiamo che il suo lato sia di lunghezza unitaria.

1. **Prima Iterazione**: possiamo facilmente dividere S_0 in quattro triangoli equilateri di lato $1/2$ congiungendo i punti medi dei suoi lati. Il triangolo nel centro è ruotato rispetto ai rimanenti tre di 180°. Se ora rimuoviamo i punti interni del triangolo centrale, non i suoi lati, otteniamo un nuovo insieme piano, contenuto in S_0, che chiamiamo S_1.
2. **Seconda Iterazione**: applichiamo ai tre triangoli equilateri di lato $1/2$ che formano S_1 la stessa procedura applicata in precedenza al triangolo S_0. In questo modo otterremo l'insieme S_2 rappresentato sempre in figura.

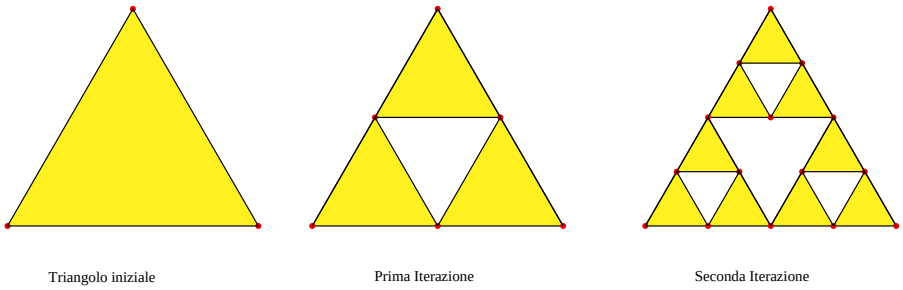

Figura 1. Generazione triangolo di Sierpinski

Se si continua nello stesso modo si ottiene una successione infinita di insiemi piani S_n il cui limite S si chiama *triangolo di Sierpinski*. Dal momento che la successione di insiemi piani che si ottiene è decrescente, nel senso che ogni insieme è contenuto nel successivo, il suo limite sarà l'intersezione:

$$S = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n$$

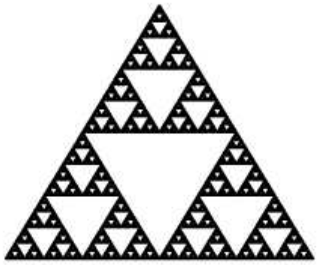

Figura 2. Triangolo di Sierpinski

Prima di procedere e chiarire in che senso S sia un insieme frattale vediamo un modo alternativo per effettuare la sua costruzione. Partiamo sempre da S_0 e applichiamo ad esso una trasformazine omotetica di centro O e di fattore $k = 1/2$. Il risultato sarà il primo triangolo colorato di figura 3. Se a questo triangolo ora applichiamo delle traslazioni, rispettivamente di un vettore $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{u}$ otterremo i rimanenti triangoli di figura 3.

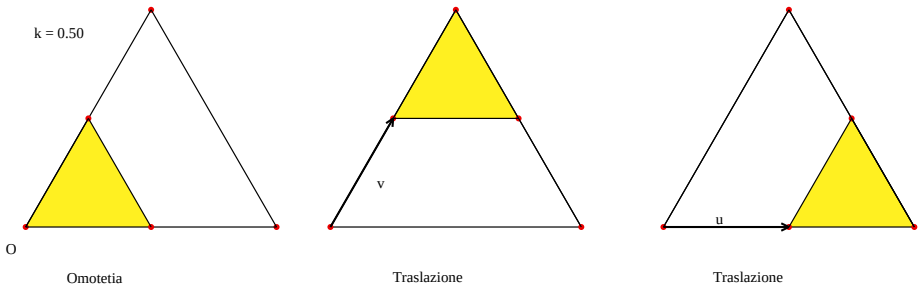

Figura 3. Trasformazioni

Possiamo scrivere le tre trasformazioni come segue:

$$f_1(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} I\boldsymbol{x}, \qquad f_2(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} I\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}, \qquad f_3(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} I\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}$$

dove I indica la trasformazione identica. Applicando queste tre trasformazioni iterativamente infinite volte si otteniene ancora il triangolo di Sierpinski S.

La terna di trasformazioni (f_1, f_2, f_3) è un esempio di IFS e il triangolo di Sierpinski che esse generano, una volta applicate iterativamente infinite volte al triangolo di partenza, è l'*insieme invariante* o l'*attrattore* di questo IFS. L'attrattore di un IFS è dunque un limite di una successione di insiemi chiusi e limitati. Il fatto che si tratti di un limite ha conseguenze rilevanti. La prima è che se si applicano le trasformazioni che definiscono l'IFS infinite volte, anzichè al triangolo S_0, ad un insieme chiuso e limitato diverso, ad esempio a un punto, il limite rimane ancora S. La seconda è che se si cambia la struttura delle funzioni che definiscono l'IFS l'attrattore assume una forma completamente diversa come si può notare guardando ad esempio la figura 6.

Analizziamo ora in dettaglio alcune proprietà di S che lo rendono estremamente interessante da un punto di vista matematico.

Proposizione 1. *Il perimetro di S è infinito.*

Dimostrazione. Dal momento che S_0 ha lato unitario il suo perimetro p_0 è 3. Se calcoliamo il perimetro di S_1 avremo:

$$p_1 = 3 + 3 \cdot \frac{1}{2}$$

e dopo n iterazioni avremo:

$$p_n = 3 + \ldots + 3 \cdot \frac{1}{2^n} > 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

che tende all'infinito al tendere all'infinito di n. □

Proposizione 2. *L'area di S è nulla.*

Dimostrazione. Dal momento che S_0 ha lato unitario la sua area a_0 è $\sqrt{3}/4$. Se calcoliamo l'area di S_n essa sarà:

$$a_n = 3^n \cdot \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

in quanto S_n è formato da 3^n triangoli di lato $1/2^n$. Si vede allora che a_n tende a 0 al tendere all'infinito di n. □

La situazione è, da un punto di vista squisitamente matematico, estremamente imbarazzante in quanto i concetti di area e di perimetro risultano del tutto inefficaci per descrivere le caratteristiche geometriche del triangolo di Sierpinski. Questo lascia presupporre che S, detto in modo molto semplice, sia qualche cosa di più di un oggetto unidimensionale (una linea) e qualche cosa di meno di un oggetto bidimensionale (una superficie). Per questa ragione nel 1919 il matematico F. Hausdorff propose di introdurre il concetto di dimensione frazionaria di un insieme. Si può verificare che la dimensione, nel senso di di Hausdorff, del triangolo di Sierpinski è:

$$d_H(S) = \frac{\ln 3}{\ln 2} \sim 1.58$$

in effetti compresa tra 1 e 2.

2 Insiemi Autosimili

Un'altra caratteristica notevole del triangolo di Sierpinski è stata definita da B. Mandelbrot con il termine di *autosomiglianza*. Possiamo esprimere il concetto di autosomiglianza con un'immagine: supponiamo di avere a disposizione una lente di ingrandimento che ci permetta di ingrandire a piacere alcune parti di S. Non è difficile convincersi del fatto che il panorama che vedremo di volta in volta sarà sempre identico a quello che vediamo guardando S. In altri termini S è fatto di parti che sono *simili* al tutto. Molti oggetti naturali e alcune parti del corpo umano possiedono questa caratteristica dell'autosomiglianza per cui sembra che la geometria frattale sia, in un certo senso, la geometria della natura. Prima di porre le basi per poter affrontare scientificamente questo aspetto è necessario discutere il concetto di *distanza di Hausdorff*.

Attraverso la distanza di Hausdorff è possibile dire quanto due insiemi piani (chiusi e limitati) sono tra loro distanti. Iniziamo dalla situazione di figura 3 e chiediamoci come si possa definire la disanza di A dal cerchio di centro O.

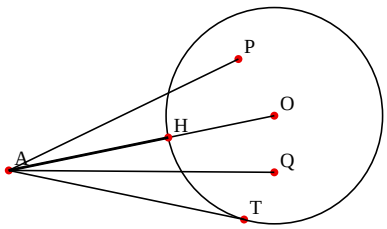

Figura 4. Distanza punto-insieme

Il cerchio è fatto di infiniti punti tuttavia risulta naturale scegliere come distanza di A da esso la distanza $d(A,\ H)$ ossia il minimo delle distanze tra A e i punti del cerchio. Dato un insieme piano (chiuso e limitato) $\mathcal{K}$ e un punto A del piano definiamo la distanza come:

$$d(A, \mathcal{K}) = \min_{P \in \mathcal{K}} \{d(A, P)\}.$$

Se ora prendiamo un secondo insieme piano (chiuso e limitato) $\mathcal{T}$ potremmo pensare di definire la distanza di questo da $\mathcal{K}$ come:

$$d(\mathcal{T},\mathcal{K}) = \max_{P\in\mathcal{T}} \{d(P,\mathcal{K})\}$$

tuttavia in questo modo non verrebbero rispettate tutte le proprietà matematiche richieste ad una distanza. Per soddisfare tutti i requisiti matematici poniamo:

$$d_h(\mathcal{T},\mathcal{K}) = \max\{d(P,\mathcal{K}), d(\mathcal{K},\mathcal{T})\}$$

che rappresenta la distanza di Hausdorff tra insiemi piani (chiusi e limitati).

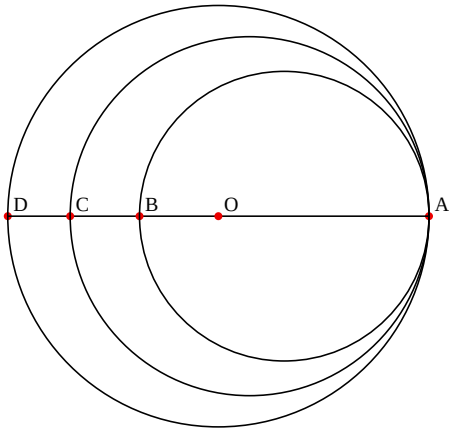

Figura 5. Distanza di Hausdorff

In figura 4 abbiamo un esempio in cui è facile calcolare la distanza di Hausdorff. L'insieme $\mathcal{K}$ è il cerchio di raggio OA. Mentre l'insieme $\mathcal{T}$ è, inizialmente, il cerchio di diametro AB. In questo caso avremo che $d_h(\mathcal{K},\mathcal{T}) = d(D,B)$. Se ora prendiamo come insieme $\mathcal{T}$ il cerchio di diametro AC avremo $d_h(\mathcal{K},\mathcal{T}) = d(D,C)$. Nel primo caso la distanza di Hausdorff tra i due cerchi è maggiore rispetto al secondo. In parole molto povere ciò ci fa comprendere che, in generale, due insiemi piani avranno distanza di Hausdorff "piccola" se sono praticamente "coincidenti".

3 IFS in natura

Un aspetto sicuramente sorprendente è come attraverso IFS, utilizzando poche trasformazioni, si riescano ad ottenere oggetti che hanno struttura complessa dall'aspetto molto simile a foglie, vegetali o a parti del corpo umano.

Figura 6. Pianta frattale con Gimp

Figura 7. Arbusto frattale con Gimp

Gli esempi in figura coinvolgono IFS con tre trasformazioni e sono stati realizzati con un programma di grafica molto potente che si chiama GIMP. Ci chiediamo ora fino a che punto sia possibile approssimare, attraverso un IFS, un insieme chiuso e limitato non necessariamente piano ma anche tridimensionale. La risposta è contenuta nel seguente teorema che vale per un qualsiasi insieme $\mathcal{X}$ chiuso e limitato in uno spazio euclideo:

Teorema 3. *(di Approssimazione) Sia $\mathcal{X}$ un insieme chiuso e limitato e sia ϵ un numero reale positivo arbitrario. Allora esiste sempre un* IFS *il cui attrattore $\mathcal{S}$ soddisfa la seguente relazione:*

$$d_h(\mathcal{X}, \mathcal{S}) < \epsilon.$$

In altri termini il teorema ci dice che ogni insieme chiuso e limitato può essere approssimato quanto bene si desidera da un IFS. Purtroppo la dimostrazione del teorema non è costruttiva nel senso che non ci dice quale sia la ricetta per costruire le trasformazioni dell'IFS approssimante.

La conoscenza di questa ricetta sarebbe estremamente utile nell'ambito dello studio della ricostruzione delle immagini, dove comunque si usano elementi di teoria dei frattali negli algoritmi per la compressione.

Bibliografia

1. G.A. Edgar, *Measure, Topology and Fractal Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1992.
2. M.F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, New York, 1988.
3. K. Falconer, *Fractal Geometry*, John Wiley & Sons, Chichester, 1990.
4. B.B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Ed. Freeman, San Francisco, 1982.
5. M Yamaguti M. Hata J. Kigami, *Mathematics of Fractals*, Ed. American Mathematical Society, Providence, 1997.