# Frammenti di Storia della Geometria con Dr. Geo

di Andrea Centomo

Associazione OFSET - 2004

# Indice

# Capitolo 1

## Introduzione e Licenza

Le pagine che seguono contengono una raccolta di esempi, tratti dalle opere di diversi matematici di notevole importanza storica, discussi utilizzando il software libero per lo studio interattivo della geometria euclidea Dr. Geo.

La scelta di questo software, al momento disponibile solo per il sistema operativo GNU/Linux, è dettata dal fatto che nel trattare gli esempi è risultato spesso essenziale disporre di un ambiente efficiente di script che permettesse l'interazione con il motore geometrico. L'interfaccia per gli script del linguaggio interprete Guile, messa a disposizione da Dr. Geo, è risultata particolarmente adatta agli scopi che ci si era prefissi, in particolare per semplicità d'uso. Per poter leggere con profitto le pagine che seguono sarebbe consigliabile disporre di Dr. Geo e del suo Manuale, che potrete ritrovare al sito ufficiale `http://www.ofset.org/drgeo/index-it.html`.

Il livello dei contenuti rende i contenuti adatti ad insegnanti e studenti della scuola media e del biennio della scuola superiore, come spunto per approfondimenti nel campo della storia della geometria euclidea. Da un punto di vista squisitamente storico il lettore troverà assai poche notizie che non siano già contenute nell'opera, ormai classica, di C. B. Boyer intitolata *Storia della Matematica*.

La redazione di questo documento è stata realizzata in modo completo con il potentissimo software libero GNU TeXmacs, utilizzando in particolare l'ambiente di macro impiegato per redarre la sua documentazione. Il lettore interessato alla conoscenza di TeXmacs può visitare il sito di riferimento `http://www.texmacs.org`.

Un ringraziamento per questo lavoro va a Hilaire Fernandes presidente dell'associazione internazionale OFSET (Organization for Free Software in Education and Teaching) per aver realizzato il software Dr. Geo e a Joris van der Hoeven per aver creato TeXmacs.

Il lettore desideroso di utilizzare questi software, ma abituato a sistemi operativi diversi da GNU/Linux, non è certo costretto a rivoluzionare per fare questo il suo computer ma può utilizzare un cdrom live come quello prodotto dall'associazione OFSET che porta il nome FREEDUC 1.4.1 scaricabile, anche in versione italiana, dal sito `http://www.ofset.org/freeduc-cd` o come EDUKNOPPIX, curato dal prof. Maurizio Paolini e dal LUG Brescia, scaricabile dal sito `http://eduknoppix.dmf.unicatt.it/`. In EDUKNOPPIX si trova sempre la versione aggiornata di Dr. Geo.

Questo documento è rilasciato con licenza d'uso GNU FDL e chi desiderasse il sorgente del documento può averlo richiedendomelo all'indirizzo `acentomo@ofset.org`.

# Capitolo 2

## Ippocrate

Dell'opera del matematico greco Ippocrate (circa 430 a.C.) non ci restano altro che una serie di testimonianze indirette posteriori dalle quali non è semplice comprendere il tipo di risultati a cui egli pervenne. Questa situazione purtroppo riguarda le opere di molti altri matematici dell'antichità. La tradizione ci tramanda che Ippocrate fosse una persona un pò ingenua al punto da essere stato persino derubato:

> ... *lasciò che lui stesso fosse derubato di una grande somma dagli ufficiali di dogana a Bisanzio, così provando, nell'opinione di Aristotele, che, anche se un buon geometra, fu stupido e incompetente negli affari della vita quotidiana.*

Sulla base di altre testimonianze disponibili possiamo tuttavia congetturare che Ippocrate sia stato il primo a determinare, in modo esatto, l'area di una figura piana con contorno curvilineo: la *lunula*. Per motivi di semplicità gli storici della matematica sono portati a pensare che la prima lunula di cui dovette essere stata calcolata l'area sia stata quella rappresentata nella figura sottostante:

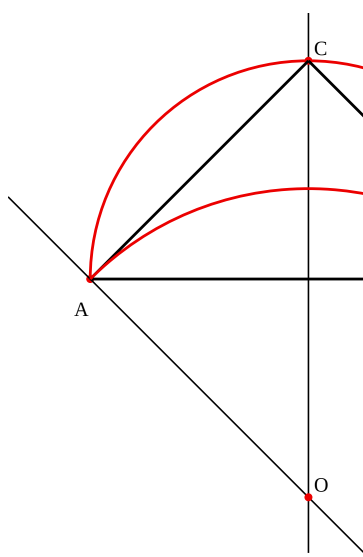


**Figura 2.1.** Lunula di Ippocrate

Qui l'uso di Dr. Geo è molto elementare: attraverso la costruzione della figura geometrica alcuni dettagli geometrici cruciali sono stati chiariti. In particolare il quadrilatero $ACB$ $O$ è un quadrato di lato $r\sqrt{2}$, dove $r$ indica il raggio della circonferenza di diametro $AB$ (dimostrarlo!). La superficie della semicirconferenza di raggio $r$ è allora:

$$S_1 = \frac{1}{2}\pi r^2$$

mentre la superficie del settore circolare di base $AB$ e centro $O$ è pari a:

$$S_2 = \frac{1}{4}\pi(r\sqrt{2})^2 - S(\mathrm{ABO}) = \frac{1}{2}\pi r^2 - S(\mathrm{ABC})$$

dove, nell'ultimo passaggio, si è sfruttato il fatto che i triangoli $ABO$ e $ABC$ sono congruenti e quindi hanno la stessa area. L'area della lunula è allora facilmente calcolabile in modo esatto:

$$S_1 - S_2 = S(ABC) = r^2$$

e coincide con quella del triangolo $ABC$.

# CAPITOLO 3

## EUCLIDE

Il regno di Tolomeo I rappresentò per l'Egitto un momento di grande rigoglio culturale. Fu per iniziativa di questo sovrano che fu fondata ad Alessandria una scuola, il Museo, a cui accedettero docenti di grande cultura e preparazione come Euclide. La tradizione ci tramanda un'immagine di questo matematico come di un uomo anziano dal temperamento gentile. La sua opera maggiormente conosciuta, che porta il titolo gli *Elementi*, è stata studiata in ogni epoca e continua ad esserlo anche oggi. Infatti buona parte degli argomenti di Geometria e Aritmetica contenuti nei libri di scuola si ritrovano già formulati, in modo non molto diverso, nell'opera originale di Euclide. Come era abitudine per i matematici del III secolo avanti Cristo Euclide si occupò anche di altre discipline scientifiche tra cui l'Astronomia e l'Ottica.

Sarebbe difficile in queste poche pagine riassumere la quantità enorme di conoscenze contenute negli *Elementi*, anche se sarebbe molto istruttivo e formativo farlo da un punto di vista culturale. Il lettore desideroso può eventualmente consultare l'ottimo commento agli *Elementi* scritto da B. Artmann ed intitolato *Euclid: the creation of mathematics*. In questo contesto ci limitiamo a studiare con Dr. Geo un argomento abbastanza celebre, tratto dal II Libro dell'opera di Euclide, ossia la costruzione della *spirale logaritmica*. L'interesse dell'argomento si fonda principalmente sul fatto che la costruzione della spirale coinvolge da vicino un numero irrazionale, il *numero aureo* $\tau = (1+\sqrt{5})/2$, di importanza cruciale nell'intera storia della matematica.

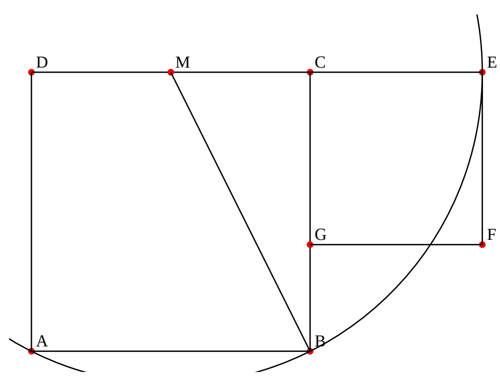


**Figura 3.2.** Costruzione gnomonica

Iniziamo costruendo il quadrato $ABCD$ di lato $l$ arbitrario. Consideriamo quindi il punto medio $M$ del lato $DC$ e sul prolungamento di $DC$, dalla parte di $C$, consideriamo il punto $E$ in modo tale che sia $MB = ME$. Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo $BCM$ si ha:

$$BM^2 = \frac{l^2}{4} + l^2 = \frac{5}{4} l^2$$

da cui $BM = \sqrt{5}l/2$. Se ora consideriamo il segmento $DE$ avremo che:

$$DE = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,l = \tau l$$

da cui possiamo concludere che la lunghezza del segmento $DE$ e la lunghezza del lato del quadrato stanno in rapporto aureo. Possiamo, partendo da questa costruzione, costruire una macro che dati i punti $A$ e $B$ realizza l'intera costruzione gnomonica.

Procediamo ora con la costruzione della *spirale logaritmica*:

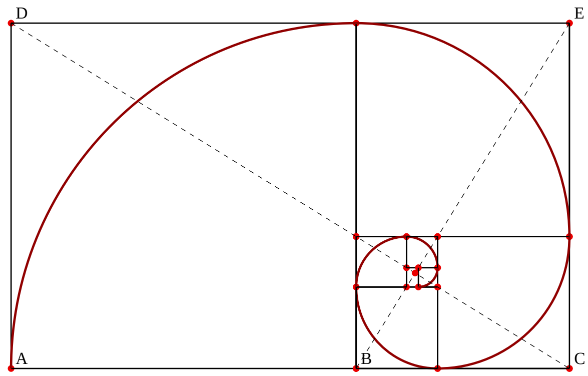


**Figura 3.3.** Spirale logaritmica

La costruzione della spirale avviene attraverso una successione di costruzioni gnomoniche successive e quindi costruendo una successione di archi di circonferenza come in figura. Con Dr. Geo è molto facile costruire la figura in quanto basta applicare più volte la macro che realizza la costruzione gnomonica. La spirale logaritmica ha molte proprietà notevoli ed è interessante in alcuni studi naturalistici. Tra i fatti matematicamente rilevanti si può dimostrare che il suo centro si trova nel punto di intersezione tra i segmenti $DC$ e $BE$.

# Capitolo 4

## Archimede

Lo scienziato siracusano Archimede (287-212 a.C.) ha contribuito con numerosi risultati allo sviluppo della matematica. Sarebbe difficile riuscire a dare un saggio, anche minimo, della sua genialità in un unico esempio. Tuttavia, visto che un certo numero di risultati archimedei riguarda la matematica elementare, è proprio su uno di questi che vogliamo soffermarci. Nel *Libro dei Lemmi* di Archimede ritroviamo lo studio del cosidetto *arbelos* o "coltello del calzolaio" che ora andiamo a descrivere. Iniziamo considerando la figura:

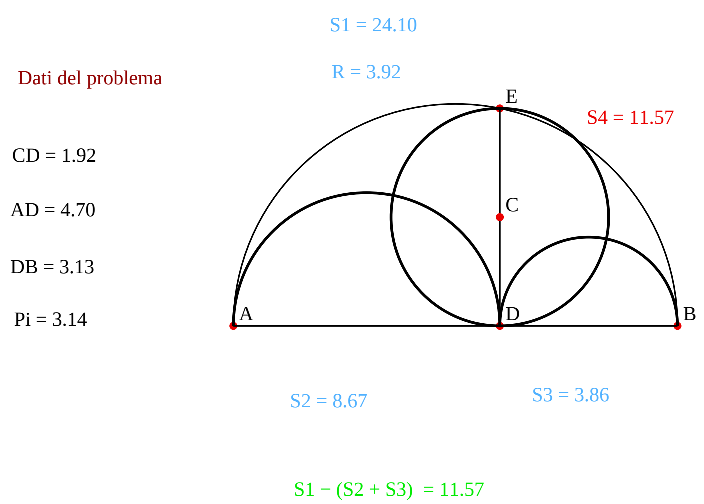


**Figura 4.4.** Problema dell'arbelos

L'*arbelos* $ABD$ è il triangolo curvilineo che ha per lati la semicirconferenza di diametro $AD$, la semicirconferenza di diametro $DB$ e la semicirconferenza di diametro $AB$. Se consideriamo il segmento $DE$ perpendicolare al diametro $AB$ e con l'estremo E giacente sulla semicirconferenza di diametro $AB$ Archimede dimostra che:

l'area dell'*arbelos* $ABD$ è uguale all'area della circonferenza di raggio $CD$.

Con Dr. Geo possiamo verificare facilmente la validità della dimostrazione archimedea utilizzando alcuni script Guile. Iniziamo scrivendo uno script che, a partire dai dati del problema, ci permetta di calcolare il raggio $R$ della semicirconferenza di diametro $AB$:

```
(define AD (getValue a1))
(define DB (getValue a2))
(/ (+ AD DB ) 2 )
```

quindi calcoliamo l'area $S_1$ della semicirconferenza di diametro $AB$ con lo script:

```
(define pi (getValue a1))
(define R (getValue a2))
( / ( * pi ( * R R )) 2 )
```

con script del tutto analoghi possiamo calcolare anche le seguenti aree: $S_2$ (area della semicirconferenza di diametro $AD$), $S_3$ (area della semicirconferenza di diametro $DB$) e $S_4$ (area della circonferenza di raggio $CD$). A questo punto, utilizzando lo script:

```
(define S1 (getValue a1))
(define S2 (getValue a2))
(define S3 (getValue a3))
( - S1 ( + S2 S3))
```

si verifica che:

$$S(ABC) = S_1 - (S_2 + S_3) = S_4$$

ossia che l'area dell'*arbelos* coincide con l'area del cerchio di raggio $CD$.

# Capitolo 5

## Apollonio di Perga

Dopo Euclide e Archimede, Apollonio è senza dubbio il matematico di maggior rilievo del periodo ellenistico. Nonostante il fulcro delle attività culturali fosse la città di Alessandria Apollonio, come del resto Archimede, non era nativo di questa ma di Perga, una cittadina dell'Asia minore. Della vita di Apollonio abbiamo poche notizie, tuttavia è stata avanzata l'ipotesi che egli sia vissuto tra il 262 e il 190 prima di Cristo. Come molti matematici vissuti nel periodo ellenistico anche Apollonio si occupò di applicazioni della matematica alle scienze: tra queste spiccano certamente quelle all'Astronomia. Dalla lettura dell'*Almagesto* di Tolomeo si può infatti concludere che fu Apollonio il primo a trattare i moti planetari utilizzando la teoria degli epicicli. Questa teoria rappresentò per quasi duemila anni la teoria di riferimento per lo studio del moto dei corpi celesti.

L'opera di maggior rilievo scritta da Apollonio è sicuramente il trattato le *Coniche*. Le curve coniche (parabola, ellisse e iperbole) erano note anche prima della nascita di Apollonio ma fu lui il primo a definirle come quelle curve che si ottengono intersecando un cono circolare, non necessariamente retto, con opportuni piani. Nel trattato di Apollonio sono contenuti molti teoremi riguardanti le coniche, tutti troppo sofisticati per essere esposti in questa sede.

Possiamo utilizzare Dr. Geo, anche se questo software non è particolarmente adatto ad uno studio approfondito della geometria analitica, per studiare alcune loro caratteristiche fondamentali. Vediamo a titolo di esempio la *parabola*.

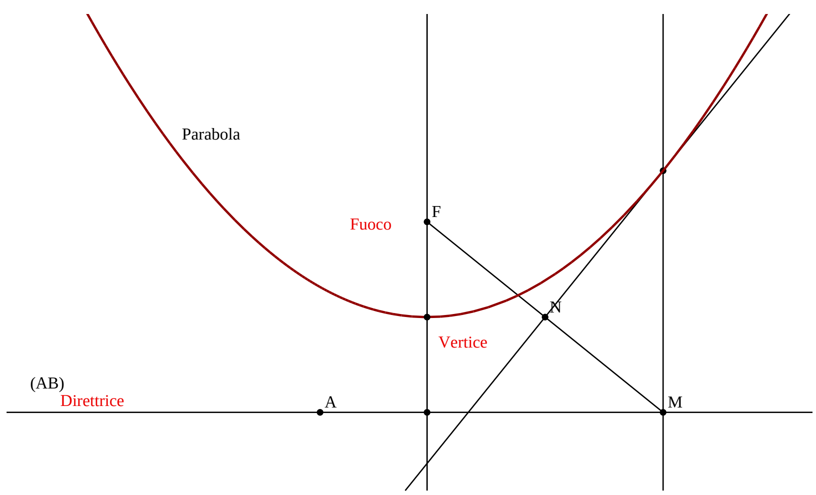


**Figura 5.5.** Parabola

Dopo aver costruito la retta $AB$, detta *direttrice*, si consideri un punto $M$ mobile su essa. Preso nel piano un punto $F$, detto *fuoco*, non appartenente alla direttrice costruiamo l'asse $h$ del segmento $MF$ e determiniamo il punto $P$ di intersezione tra $h$ e la perpendicolare ad $AB$ nel punto $M$. Se a questo punto utilizzando il comando Luogo costruiamo con Dr. Geo il luogo di $P$ rispetto ad $M$ che si move sulla direttrice otteniamo una *parabola*.

Questa costruzione ci porta a pensare la parabola come il luogo dei punti del piano *equidistanti* da fuoco e direttrice per cui risulta un pò difficile credere che la stessa curva si possa ottenere intersecando un cono con un piano. Non è nostra intenzione approfondire questo aspetto che il lettore potrà comunque ben trattato nel libro di D. Hilbert e S. Cohn-Vossen dal titolo *Geometria Intuitiva*.

# Capitolo 6

## Menelao

Lo scienziato alessandrino Menelao (circa 100 d.C.) scrisse diverse opere dedicate all'astronomia e alla matematica. Di esse ci rimane solamente, in traduzione araba, la *Sphaerica*. In questo trattato Menelao espone diversi risultati relativi alla geometria su una sfera. Tra questi vi è un teorema molto famoso che ha un equivalente in geometria piana. Con riferimento alla figura sottostante:

Teorema 6.1. (di Menelao) *Sia* ABC *un triangolo qualsiasi, sul prolungamento di* AB *dalla parte di $B$ si consideri un punto $D$ e sul lato* AC *del triangolo non adiacente al segmento* BD *si consideri un punto $F$. Allora vale la seguente relazione:*

$$\mathrm{AD} \cdot \mathrm{BE} \cdot \mathrm{CF} = \mathrm{BD} \cdot \mathrm{CE} \cdot \mathrm{AF}$$

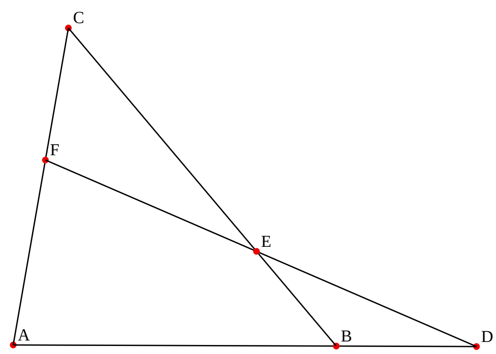


**Figura 6.6.** Teorema di Menelao

Utilizzando Dr. Geo vogliamo ora ripercorrere la dimostrazione di questo teorema. La dimostrazione diviene molto semplice se da $B$ si traccia la retta parallela ad AC e si chiama $G$ il punto di intersezione di questa retta con DF.

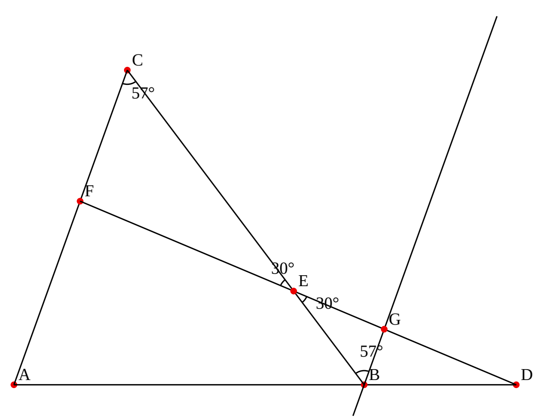


**Figura 6.7.** Dimostrazione del teorema

Con Dr. Geo possiamo verificare che i triangoli $CEF$ e $BGD$ sono simili, in quanto hanno due angoli uguali, e quindi:

$$\frac{CF}{BG} = \frac{CE}{BE}$$

Sempre con Dr. Geo (lo lasciamo al lettore) si può verificare che i triangoli $BDG$ e $ADF$ sono simili e quindi che:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AF}{BG}$$

da cui anche:

$$BG = \frac{AF \cdot BD}{AD}$$

che sostituito nella prima espressione trovata porta alla tesi del teorema.

# Capitolo 7

## Claudio Tolomeo

Tra le opere astronomiche più importanti di ogni tempo spicca la *Sintesi Matematica* scritta dall'astronomo alessandrino Claudio Tolomeo nel II secolo dopo Cristo. L'opera veniva distinta da un altro gruppo di opere astronomiche indicandola come la raccolta "maggiore". Dall'uso arabo di indicare l'opera tolemaica come la grande, *megiste*, proviene il termine *Almagesto* con cui essa è maggiormente conosciuta. Forse sarebbe stato più opportuno mantenerne il titolo greco originale se non altro perché esso esprime con chiarezza il fatto, spesso trascurato, che l'*Almagesto* non è un'opera filosofica o astronomica ma un trattato un cui la matematica viene applicata sistematicamente allo studio del moto dei corpi celesti. Con termine moderno potremmo dire che l'*Almagesto* è il primo trattato antico completo che ci è pervenuto di Meccanica Celeste. I modelli planetari esposti da Tolomeo, tutti espressi in forma geometrica, si rivelarono talmente in accordo con i dati sperimentali ricavati dalle osservazioni astronomiche da essere considerati di riferimento per quasi duemila anni.

Non è nostra intenzione esplorare qui i modelli quanto esporre utilizzando Dr. Geo un celebrato teorema, che viene attribuito a Tolomeo in quanto contenuto nell'*Almagesto*, sui quadrilateri inscritti in una circonferenza. In realtà è stata avanzata l'ipotesi per cui il teorema doveva essere conosciuto già prima di Tolomeo ma dal momento che nessun documento originale precedente all'*Almagesto* lo contiene la sua attribuzione spetta a Tolomeo. Iniziamo considerando la seguente figura che rappresenta un quadrilatero convesso inscritto in una circonferenza:

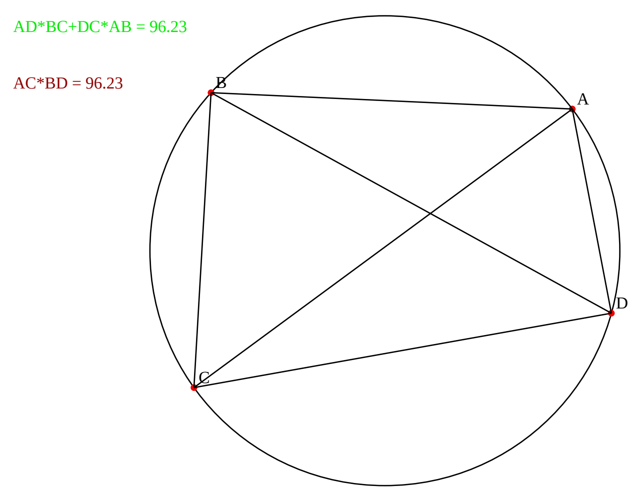


**Figura 7.8.** Teorema di Tolomeo

Il teorema di Tolomeo afferma:

TEOREMA 7.1. (DI TOLOMEO) *Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso inscritto in una circonferenza allora la somma dei prodotti delle lunghezze dei lati opposti è uguale al prodotto delle diagonali ossia:*

$$AD \cdot BC + DC \cdot AB = AC \cdot BD$$

Tralasciando la dimostrazione del teorema possiamo verificare "empiricamente" con Dr. Geo la validità dell'enunciato ricorrendo agli script Guile. Possiamo infatti scrivere un primo script che calcola la somma dei prodotti dei lati opposti del quadrilatero:

```
(define AD (getLength a1))
(define BC (getLength a2))
(define DC (getLength a3))
(define AB (getLength a4))
(+ (* AD BC )(* DC AB ))
```

con un secondo script possiamo calcolare il prodotto delle diagonali:

```
(define AC (getLength a1))
(define BD (getLength a2))
(* AC BD )
```

e verificare, anche deformando dinamicamente la figura, che i valori dei due script coincidono.

Il fatto interessante è che con Dr. Geo possiamo verificare l'importanza di aver precisato nell'enunciato del teorema che il quadrilatero deve essere *convesso*. Infatti se deformiamo dinamicamente la figura in modo che il quadrilatero perda la convessità:

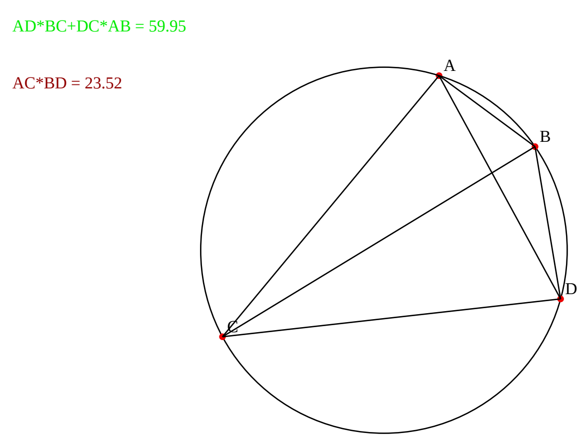


**Figura 7.9.** Quadrilatero non convesso

il teorema non risulta più valido come evidenziato dal fatto che i due script ora danno risultati completamente diversi.

# Capitolo 8

## Tsu Chung-chi

Lo studio della storia della Matematica cinese riserva sempre incredibili sorprese. Capita spesso di imbattersi in risultati che anticipano di molti secoli risultati analoghi scoperti dai matematici occidentali.

Tra i problemi affrontati con successo dai matematici cinesi possiamo senza dubbio includere il calcolo di ottime approssimazioni di $\pi$. Il matematico cinese che raggiunse i risultati migliori, se paragonati all'epoca in cui è vissuto, è Tsu Chung-chi (430-501 d.C.) che riuscì a determinare la stima:

$$3,1415926 < \pi < 3,1415927$$

Come sia riuscito in questa impresa Tsu Chung-chi rimarrà per sempre un mistero in quanto le opere in cui era contenuto il procedimento sono andate perdute. La stima di $\pi$ attraverso i moderni strumenti informatici permette di andare ovviamente ben oltre la stima di ogni matematico dell'antichità. Qui vogliamo mostrare come si possa determinare una buona stima di $\pi$ anche utilizzando Dr. Geo. Il metodo che usiamo ricalca, nella sostanza, il metodo di esaustione formulato da Eudosso ed anticipa quell'insieme di tecniche di calcolo moderne note con il nome di calcolo integrale.

Iniziamo costruendo un esagono inscritto in una circonferenza di raggio $R=5$. Se approssimiamo la lunghezza $\mathcal{L}$ della circonferenza con il perimetro dell'esagono troveremo: $\mathcal{L} \approx 30$.

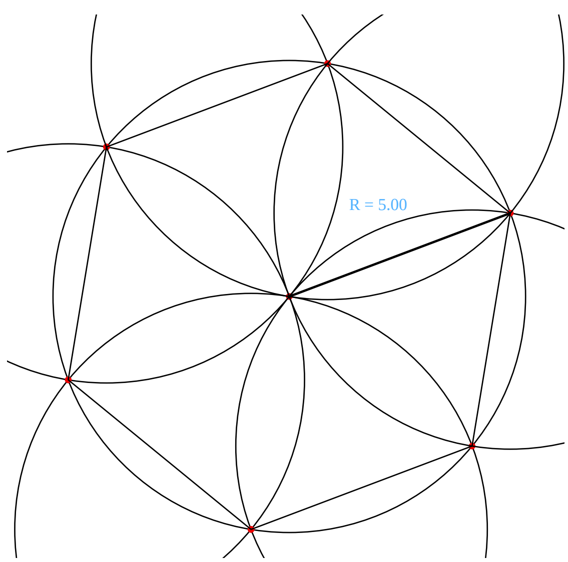


**Figura 8.10.** Esagono inscritto

Possiamo allora calcolarci una prima rozza approssimazione di $\pi$ come segue:

$$\pi_0 = \frac{\mathcal{L}}{2R} = 3$$

Costruiamo ora, a partire dall'esagono, il lato del dodecagono inscritto nella circonferenza:

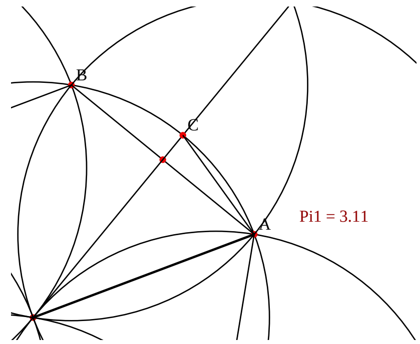


**Figura 8.11.**

La costruzione è molto semplice: basta prendere il punto medio del lato dell'esagono, costruire la semiretta cha ha per origine il centro della circonferenza e passante per il punto medio e determinare l'intersezione $C$ della semiretta con la circonferenza. Il segmento $AC$ sarà un lato del dodecagono inscritto nella circonferenza. Se ora approssimiamo la lunghezza della circonferenza con il perimetro del dodecagono e rideterminiamo, come sopra, il valore di $\pi$ otteremo la stima migliore:

$$\pi_1 \approx 3,11$$

Dr. Geo ci permette di calcolare il valore ricorrendo ad uno script Guile che ha in ingresso il raggio della circonferenza e il lato del dodecagono:

```
(define L (getLength a1))
(define R (getValue a2))
(/ (* L 12 ) (* 2 R ))
```

Naturalmente si può procedere iterativamente andando a determinare i lati dei poligono regolari inscritti nella circonferemza di 24 lati, 48 lati ecc. Si otterranno in corrispondenza approssimazioni di $\pi$ sempre migliori.

# Capitolo 9

## Pappo

L'opera di Pappo di Alessandria (circa 320 d.C.) riveste un'importanza notevole, oltre che per i risultati matematici in essa contenuti, anche come documentazione storica relativa ai lavori di matematici di primo piano come Archimede, Euclide, Apollonio e Tolomeo.

L'esempio che vogliamo trattare con Dr. Geo è tratto dal libro III del trattato di Pappo intitolato la *Collezione* e riguarda le medie. Prima di procedere conviene ricordare che, date due grandezze qualsiasi $x$ e $y$, la loro *media aritmetica* è il numero:

$$m_a = \frac{x+y}{2}$$

la loro *media geometrica* il numero:

$$m_g = \sqrt{xy}$$

e la loro *media armonica* il numero:

$$m = \frac{m_g^2}{m_a} = \frac{2xy}{x+y}.$$

Pappo mostra che esiste una semplicissima figura geometrica in cui queste tre medie sono rappresentate contemporaneamente:

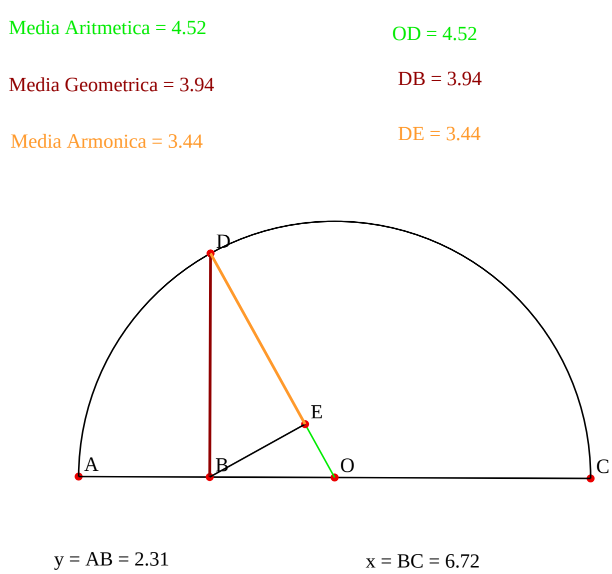


**Figura 9.12.** Le tre medie

Le grandezze $x$ e $y$ di cui si calcolano le medie sono rappresentate dalla lunghezze dei segmenti BC e AB. Utilizzando gli script in Guile possiamo calcolare la media aritmetica:

```
(define x (getValue a1))
(define y (getValue a2))
(/ ( + x y ) 2 )
```

la media geometrica:

```
(define x (getValue a1))
(define y (getValue a2))
(sqrt ( * x y) )
```

e la media armonica:

```
(define mg (getValue a1))
(define ma (getValue a2))
(/ ( * mg mg ) ma )
```

A questo punto utilizzando il righello è facile vedere quali segmenti rappresentano ciascuna delle tre medie!

# Capitolo 10

## Brahmagupta

La storia della Matematica indiana è ricca di risultati interessanti sia nel campo della Geometria che dell'Algebra. In questo paragrafo analizziamo un risultato dovuto al matematico indiano Brahmagupta (circa 628 d.C.) che possiamo trovare nel trattato *Brahmasphuta Siddhanta* che rappresenta un tentativo non completamente riuscito di generalizzazione della formula di Erone.

Come noto la formula di Erone permette, a partire dalla lunghezza dei tre lati di un triangolo, di calcolare la sua area:

$$S(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

dove $p$ denota il semiperimetro di un triangolo $ABC$ i cui lati misurano $a$, $b$ e $c$. Brahmagupta si pone il problema di determinare una formula analoga per un quadrilatero $ABC$ $D$. In altri termini egli tenta di determinare una formula che, a partire dalle lunghezze dei lati di un quadrilatero, permetta di calcolare la sua area. La formula di Brahmagupta è la seguente:

$$S(ABCD) = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

dove $p$ denota il semiperimetro del quadrilatero e $a$, $b$, $c$ e $d$ le lunghezze dei quattro lati. Questa formula non è valida in generale ma solo nel caso particolare in cui il quadrilatero abbia una coppia di angoli opposti la cui semisomma è uguale a 90°. Possiamo verificare con chiarezza questo fatto utilizzando Dr. Geo a partire dalla figura seguente:

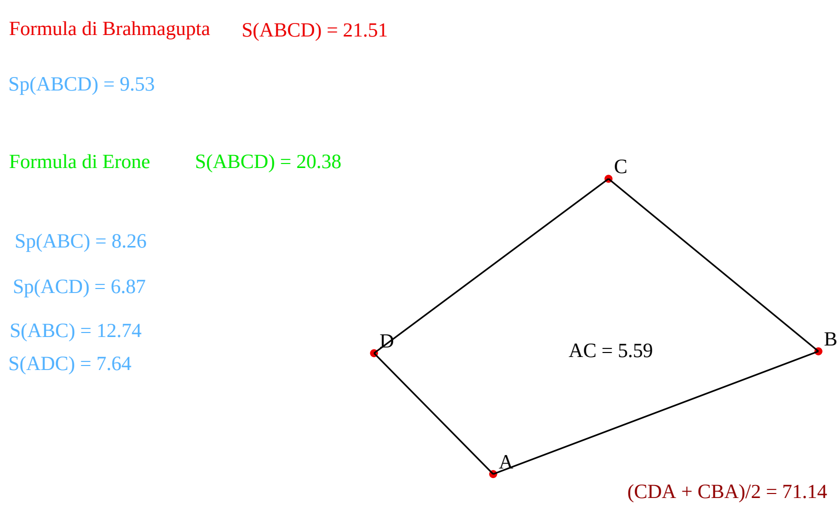


**Figura 10.13.** Formula di Brahmagupta (primo caso)

Dal momento che si tratta di una generalizzazione della formula di Erone abbiamo calcolato con questa formula le aree dei due triangoli $ABC$ e $ACD$ che formano il quadrilatero $AB$ $CD$. Quindi le abbiamo sommate ottenendo l'area del quadrilatero $S(ABCD)=20,38$. Per non appesantire la struttura degli script Guile utilizzati per i calcoli si è proceduto come segue. In primo luogo abbiamo calcolato il semiperimetro dei triangoli così ad esempio, per il triangolo $ABC$, lo script che permette il calcolo del semiperimetro è:

```
define AC (getValue a1))
(define BC (getLength a2))
(define AB (getLength a3))
(/ (+ AC (+ AB BC)) 2)
```

da cui, attraverso uno script che implementa la formula di Erone, si ottiene direttamente l'area $ABC$:

```
(define s (getValue a1))
(define AC (getValue a2))
(define AB (getLength a3))
(define BC (getLength a4))
(sqrt (* (* s (- s AC)) (* (- s AB )(- s BC ))))
```

In modo analogo si calcola l'area del triangolo $ADC$. Finalmente abbiamo sommato le aree dei due triangoli usando lo script:

```
(define s1 (getValue a1))
(define s2 (getValue a2))
(+ s1 s2 )
```

Successivamente abbiamo implementato la formula di Brahmagupta. Anche in questo caso si è proceduto per passi prima calcolando il semiperimetro del quadrilatero $ABCD$:

```
(define AB (getLength a1))
(define BC (getLength a2))
(define CD (getLength a3))
(define DA (getLength a4))
(/ (+ (+ AB BC)(+ CD DA)) 2 )
```

e quindi abbiamo calcolato la sua area attraverso la formula:

```
(define s (getValue a1))
(define AB (getLength a2))
(define BC (getLength a3))
(define CD (getLength a4))
(define DA (getLength a5))
```

```
(sqrt (* (* (- s AB)(- s BC))(* (- s CD )(- s DA ))))
```

Come si nota i risultati dei due calcoli delle aree sono diversi e ciò permette di concludere che la formula di Brahmagupta non è in generale valida. In effetti se calcoliamo la semisomma della coppia di angoli opposti ∠CDA e ∠CBA attraverso lo script:

```
(define a (getAngle a1))
(define b (getAngle a2))
(/ (+ a b ) 2 )
```

otteniamo il valore 74,47° diverso da 90°. Se ora deformiamo dinamicamente la figura possiamo fare in modo che il quadrilatero soddisfi la condizione ∠CDA + ∠CBA = 180°: in questo caso Dr. Geo ci mostra che le due formule effettivamente producono lo stesso risultato!

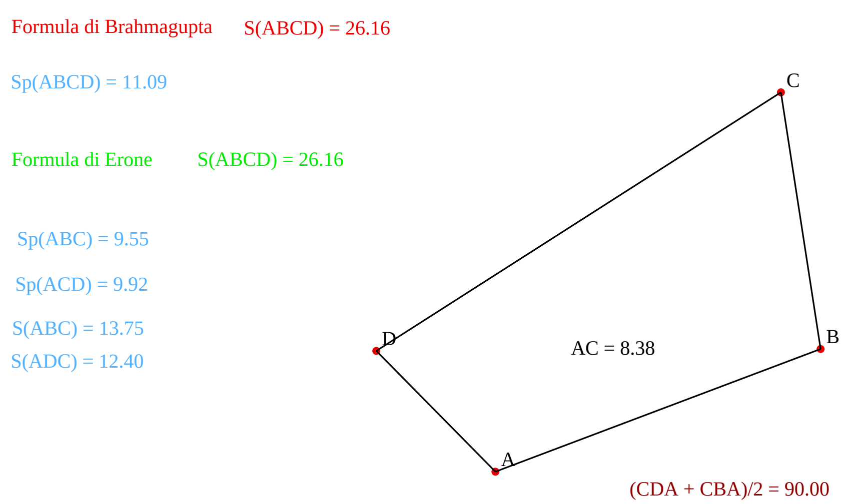


**Figura 10.14.** Formula di Brahmagupta (secondo caso)

Prima di concludere tuttavia vogliamo soddisfare una curiosità che forse sarà sorta nel lettore ossia quale sia la formula corretta che permette di determinare l'area di un quadrilatero a partire dalla misura dei suoi lati. La formula è la seguente:

$$S(ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos\alpha}$$

dove $\alpha$ indica la semisomma di una coppia di angoli opposti del quadrilatero. La validità di questa formula può essere verificata con Dr. Geo modificando lo script che implementa la formula di Brahmagupta.

# Capitolo 11

## J. Keplero

L'astronomo Giovanni Keplero (1580-1630) è solitamente noto per la scoperta delle leggi che governano il moto dei pianeti in riferimento eliocentrico, ha dato contributi significativi anche alla matematica. Una parte interessante dell'opera di Keplero è dedicata allo studio delle tassellazioni del piano con poligoni. In modo non del tutto rigoroso e restrittivo, con il termine *tassellazione* intendiamo qui un ricoprimento del piano con poligoni. Tra le tassellazioni possiamo distinguere in primo luogo quelle *monoedriche*, ossia in cui con un solo poligono si riesce a ricoprire l'intero piano. Ci sono solo tre poligoni regolari che permettono di definire tassellazioni monoedriche del piano euclideo: il triangolo equilatero, il quadrato e l'esagono regolare. Si hanno diverse possibilità per generalizzare le tassellazioni monoedriche con poligoni regolari. Una prima via seguita da Keplero consiste nel mantenere fermo il presupposto per cui la tassellazione sia fatta di poligoni regolari, ma nell'ammettere che possa non essere monoedrica. Sviluppando questo aspetto Keplero riuscì ad ottenere la classificazione delle tassellazioni archimedee del piano ossia di quelle tassellazioni in cui, in ogni vertice, si incontrano i medesimi tipi di poligono regolare. Il secondo modo consiste invece nell'ammettere che alcuni tasselli possano essere poligoni non regolari ma, ad esempio, stellati.

Per mostrare come attraverso Dr. Geo sia possibile studiare anche semplici tassellazioni analizziamo il motivo Z che compare nell'*Harmonice Mundi* pubblicata nel 1619.

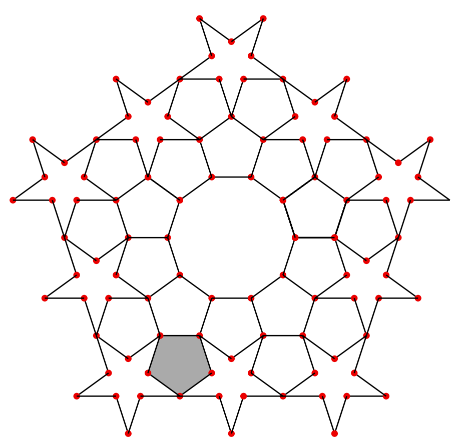

**Figura 11.15.** Motivo Z

La realizzazione della figura è abbastanza laboriosa e richiede la costruzione di alcune macro. Attraverso le macro è possibile aggiungere a Dr. Geo nuove costruzioni geometriche. Per realizzare una macro si devono definire, a partire da una prefissata costruzione geometrica, un certo numero di oggetti in ingresso e alcuni oggetti geometrici in uscita, avendo cura del fatto che la scelta degli oggetti sia logicamente coerente: gli oggetti finali della macro devono dipendere in modo esclusivo dagli oggetti iniziali, in modo che Dr. Geo possa ricostruire senza ambiguità l'intera costruzione. Il programma è in grado poi di memorizzare la sequenza della costruzione e di riprodurla ogni volta che l'utilizzatore, dopo aver azionato il comando di esecuzione di una macro, andrà a cliccare su tutti gli oggetti geometrici che coincidono con gli oggetti in ingresso della macro stessa. Lasciamo al lettore il piacere di divertirsi nella riproduzione del motivo di Keplero o di altri che ritroverà nel magnifico libro di B. Grünbaum e G.C. Shephard intitolato *Tilings and patterns*.

# Capitolo 12

## Renato Cartesio

Rene Descartes, noto a molti con il nome italiano di Renato Cartesio, è stato uno dei massimi filosofi del XVII secolo. Proveniente da una famiglia agiata ebbe una formazione culturale di alto profilo, studiando al collegio gesuita di La Fléche. Come altri importanti scienziati si addottorò stranamente prima in Giurisprudenza per poi dedicarsi, per tutto il resto della vita, agli studi scientifici e, soprattutto, filosofici. Un curioso annedoto vuole che egli avesse l'abitudine di trattenersi a letto, in particolare durante l'inverno, fino alle dieci del mattino, per pensare a problemi di matematica.

Nella storia della Matematica il suo nome è legato indissolubilmente al concetto di coordinata cartesiana ed egli è considerato, anche se non perfettamente a ragione, il padre della geometria analitica. In realtà una lettura diretta della principale opera matematica di Cartesio ossia la sua *Géométrie* rivela come il metodo geometrico cartesiano, diversamente da quello moderno, consistesse principalmente nel tradurre problemi algebrici in problemi geometrici e non viceversa.

Come esempio del metodo cartesiano esploriamo con Dr. Geo la tecnica di soluzione geometrica di una equazione di secondo grado del tipo:

$$x^2 = ax + b^2$$

dove $a$ e $b$ sono due costanti. Questo esempio è tratto dal Libro I della *Géométrie* e direttamente al testo di quest'opera si rimanda per ulteriori dettagli e approfondimenti.

Consideriamo allora la costruzione di figura:

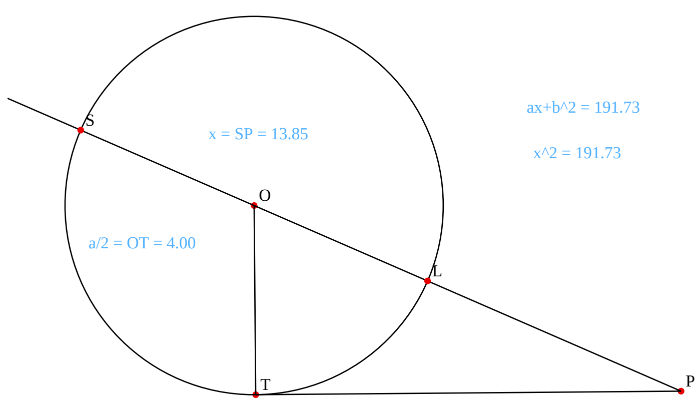


**Figura 12.16.** Soluzione di equazioni

Si inizia con un segmento $TP$ di lunghezza $b = 9$ cm. e da esso si traccia il segmanto perpendicolare $OT$ di lunghezza $a/2 = 4$ cm. Si costruisce quindi la circonferenza di centro $O$ e passante per $T$ la quale interseca la semiretta $PO$ nei punti $L$ e $S$. Non è difficile dimostrare che detta $x$ la lunghezza del segmento $SP$ essa verifica l'equazione di secondo grado precedente.

Prima di dare la dimostrazione di questo fatto vediamo come verificare la verità di questa asserzione con Dr. Geo. Possiamo in primo luogo utilizzare uno script Guile che calcola $x^2$ a partire dal valore della lunghezza di $SP$:

```
(define x (getValue a1))
(* x x )
```

quindi un secondo script che calcola la quantità $ax + b^2$ a partire dai rispettivi valori:

```
(define m (getValue a1))
(define x (getValue a2))
(define b (getValue a3))
(+ (* x (* 2 m )) (* b b ))
```

e notare che essi assumono valori coincidenti. Tuttavia ciò non costituisce una dimostrazione rigorosa che comunque possiamo esporre facilmente in quanto dipendente solo dalla conoscenza del teorema di Pitagora e dalla formula del quadrato del binomio.

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo $POT$ si ha:

$$OM^2 = b^2 + \frac{a^2}{4}$$

posto $TM = x$ si ha anche:

$$x^2 = \left(OM + \frac{a}{2}\right)^2 = b^2 + \frac{a^2}{2} + aOM$$

ora osservando che $OM + a/2 = x$ si ha:

$$x^2 = b^2 + ax$$

che è quanto si voleva dimostrare. □

Alternativamente si può verificare che la lunghezza del segmento $PS$ di figura coincide effettivamente con la soluzione positiva dell'equazione di secondo grado: $x^2 - 8x - 81 = 0$. A questo proposito si potrebbe obiettare che il metodo di soluzione cartesiano permette di determinare una sola delle due soluzioni dell'equazione data. In effetti Cartesio era a conoscenza dell'esistenza di soluzioni negative delle equazioni ma considerave queste ultime delle soluzioni "false".

# Capitolo 13

## Eulero

Il matematico svizzero Leonardo Eulero fu la figura di riferimento per lo sviluppo della Matematica del XVIII secolo. Il padre di Eulero, come i padri di molti altri insigni matematici, avrebbe desiderato per il figlio una carriera di tipo ecclesiastico, quindi ben diversa da quella di matematico. Se così fosse accaduto si sarebbero persi gli 886 lavori, una quantità impresionante, che portano tutti la firma di Eulero e che furono pubblicati in parte (500) durante la sua vita e i rimanenti postumi.

Il contenuto dei lavori di Eulero è in generale di alto profilo e tocca aspetti della matematica di una certa complicazione. Tuttavia, per dare un saggio della genialità di Euler, possiamo esplorare con Dr. Geo un contributo originale che egli diede alla geometria euclidea. Consideriamo allora il triangolo $ABC$ di figura:

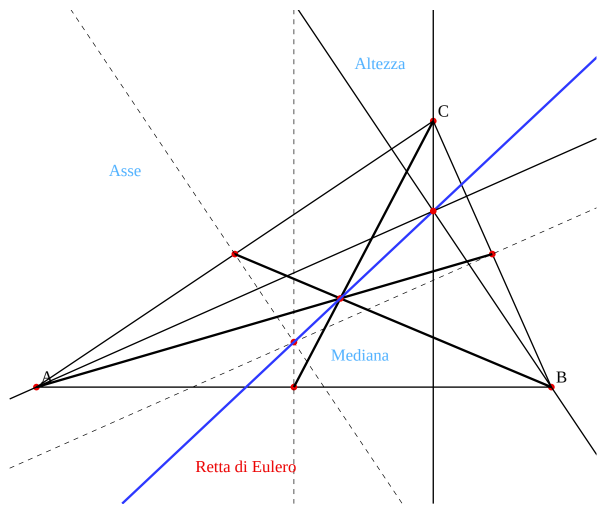


**Figura 13.17.**

Di esso sono state tracciate le mediane (linee in grassetto), le altezze (linee continue) e gli assi (linee tratteggiate). Come noto le mediane di un triangolo si intersecano in un punto interno al triangolo detto *baricentro*, le altezze si intersecano in un punto detto *ortocentro* e i tre assi si intersecano in un punto detto *circocentro* in quanto esso coincide con il centro della circonferenza in cui è inscritto il triangolo (verificarlo!). Il teorema di Eulero afferma che:

Teorema 13.1. (di Eulero) *In un triangolo qualsiasi baricentro, ortocentro e circocentro sono punti allineati.*

La dimostrazione del teorema non è semplice tuttavia, modificando dinamicamente la figura con Dr. Geo, è semplice persuadersi della sua validità anche senza dimostrazione diretta.

# Capitolo 14

## Gauss

Karl Friederich Gauss è senza dubbio uno dei più grandi matematici di ogni tempo. Per dare un saggio della sua precoce genialità proponiamo, come esempio di costruzione complessa da realizzare con Dr. Geo, la costruzione con riga e compasso del poligono regolare avente 17 lati. La costruzione è rappresentata in figura:

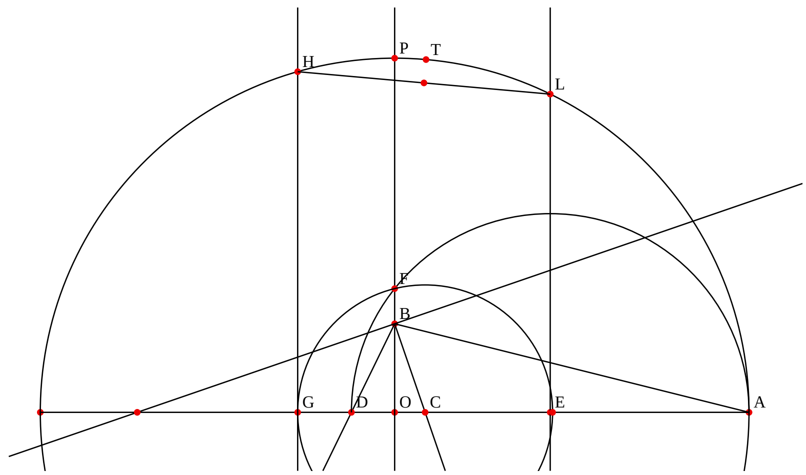


**Figura 14.18.** Costruzione di un poligono regolare con 17 lati

Si inizia costruendo una circonferenza di raggio $OA$, dove $A$ è un vertice del poligono di 17 lati che andiamo a costruire. Da $O$ si traccia la perpendicolare al raggio che interseca in $P$ la circonferenza iniziale e sul segmento $OP$ si considera il punto $B$ tale che:

$$BO = \frac{1}{4} OP.$$

Per determinare $B$ sarà sufficiente costruire prima il punto medio del segmento $OP$ e quindi il punto medio del segmento che ha come estremi il punto medio trovato e il punto $O$. A questo punto si costruisce la semiretta $BC$ in modo tale che tra gli angoli valga la relazione:

$$\angle OBC = \frac{1}{4} \angle OBA.$$

Per determinare questa semiretta abbiamo precedentemente costruito la macro *bisettrice* e quindi l'abbiamo applicata due volte. La semiretta $BD$ è stata costruita in modo tale che $\angle DBC = 45°$. Anche in questo caso non si è ricorso a misure ma si è costruita $BD$ come bisettrice di un angolo retto. La semicirconferenza di diametro $DA$ e centro $E$ interseca $OP$ nel punto $F$. La circonferenza di centro $C$ passante per $F$ interseca $OA$ in $E$ (verificarlo!) e il prolungamento di $OA$ in $G$. Tracciate le perpendicolari ad $OA$ in $E$ e $G$ queste intersecano la circonferenza di partenza nei punti $L$ e $H$. Detto $T$ il punto medio tra $L$ e $H$ sull'arco, che possiamo facilmente costruire a partire dalla corda $LH$, si dimostra che i punti $L$, $T$, $H$ e $A$ sono vertici del poligono regolare di 17 lati inscritto nella circonferenza di raggio $OA$. Si può a questo punto completare la figura per simmetria ottenendo:

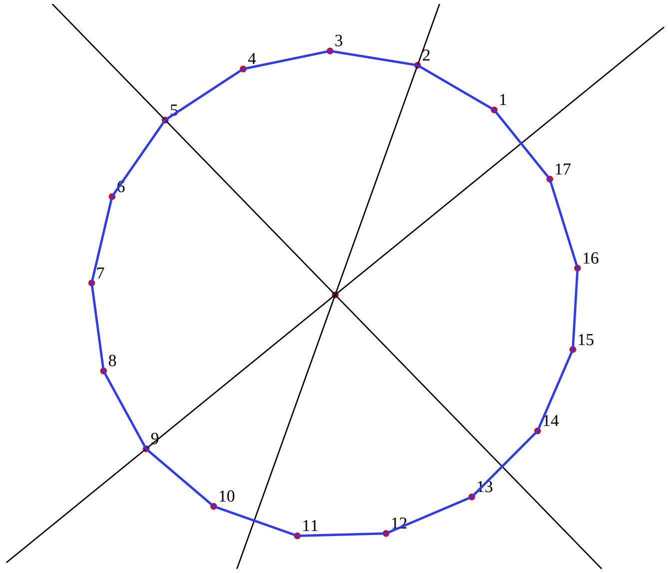


**Figura 14.19.** Poligono regolare con 17 lati